

جامعة البعث
تحليل عقدي /2/ اسم الطالب :

القسم الرياضيات - كلية العلوم الفصل الأول 2017-2018

السؤال الأول : (20+10=30 درجة)

1- أوجد نشر لورانت للدالة $f(z) = \frac{z-2}{z^2-3z}$ في النطاق $|z| < 3$.

ثم من النشر الناتج حدد نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها.

2- عين النقاط من $|z| \leq 1$ التي تبلغ عندها الدالة $f(z) = z^3 + iz$ قيمتها العظمى.

السؤال الثاني : (30 درجة)

أوجد وصنف النقاط الشاذة المعزولة للدوال الآتية

$$f_1(z) = \frac{2z-3\pi}{(2z-\pi)\cos z} \text{ \& } f_2(z) = \frac{1}{7-\sin z} \text{ \& } f_3(z) = \frac{1}{z^2 \sin 2z} e^{\frac{1}{z-1}}$$

السؤال الثالث : (20 درجة)

اعتمادا على نظرية الرواسب أوجد قيمة

$$I_2 = \int_{|z|=2} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} dz \text{ \& } I_1 = \int_{|z|=2} \frac{2z}{(z^5-1)(z-3)} dz$$

السؤال الرابع : (20 درجة)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-\cos\theta}$$

1- احسب قيمة التكامل

مدرس المقرر: د. رامز الشيخ فتوح

$$30 = 10 + 20$$

جواب السؤال الأول

نكتب: (20)

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2}\right) \left(1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} + \frac{27}{z^3} + \dots\right) \quad 3 < |z|$$

(2) (1) (3)

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{9}{z^3} + \frac{27}{z^3} + \frac{81}{z^4} + \dots \quad (2)$$

$$- \frac{2}{z^2} - \frac{6}{z^3} - \frac{18}{z^4} - \frac{54}{z^5} \quad (2)$$

نضرب

$$2 \quad f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \frac{27}{z^5} + \frac{81}{z^6} + \dots \quad 3 < |z|$$

4 - من أجل أن نجد نقطة اللوغاريتمية في نقطة z ،
نأخذ $z = 1000$ ، ونكتب $z = re^{i\theta}$ ،
ونجد r و θ من المعادلتين:

$$4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} f(z) = -b_1 = -1 \\ \operatorname{Im} f(z) = b_2 = 0 \end{array} \right.$$

معرفتنا من أن $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{9}{z^4} + \frac{27}{z^5} + \frac{81}{z^6} + \dots$

$$2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (10) \quad \text{نكتب في صورة دائرة الوحدة } z = re^{i\theta} \\ \text{نجد } r \text{ و } \theta \text{ من المعادلتين:} \\ \text{نضرب المعادلة الأولى في } z \text{ ونجد } r \text{ و } \theta \text{ من المعادلتين:} \\ \text{نضرب المعادلة الثانية في } z^2 \text{ ونجد } r \text{ و } \theta \text{ من المعادلتين:} \end{array} \right.$$

$$2 \quad \left\{ \begin{array}{l} |f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)} = (e^{i\theta} + i e^{i\theta}) (e^{-i\theta} - i e^{-i\theta}) \\ = 1 - e^{2i\theta} + i e^{2i\theta} + 1 = 2 - i (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) \\ = 2 + 2 \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i} = 2 + 2 \sin 2\theta \end{array} \right.$$

$$1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن } -1 \leq \sin 2\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 + 2 \sin 2\theta \leq 4 \\ \text{أي أن القيمة المطلقة لـ } |f(z)|^2 \text{ هي 4، نضرب في 2} \end{array} \right.$$

$$1 \quad \begin{cases} 2 + 2\sin 2\theta = 4 \Rightarrow \sin 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \\ \text{أيضاً } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ حيث } n \text{ عدد صحيح} \end{cases}$$

$$2 \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{حيث } \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ حيث } n \text{ عدد صحيح}$$

هذه الأنظمة الأربع تمثل النقاط الأربع في دائرة الوحدة

جواب السؤال الثاني (د3 و د4)

$$1 \quad \text{النظامان } z_1 \text{ و } z_2 \text{ هما جذور المعادلة } z^2 - 2z + 2 = 0 \quad (10)$$

$$2 \quad \begin{cases} \text{حيث } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{هذه الأنظمة الأربع تمثل النقاط الأربع في دائرة الوحدة} \\ \text{أيضاً } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} \text{بأي النظام } z_1 \text{ و } z_2 \text{ هما جذور المعادلة } z^2 - 2z + 2 = 0 \\ \text{أيضاً } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$10 \quad \begin{cases} \text{النظامان } z_1 \text{ و } z_2 \text{ هما جذور المعادلة } z^2 - 2z + 2 = 0 \\ \text{أيضاً } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (10)$$

$$2 \quad \begin{cases} \text{حيث } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{هذه الأنظمة الأربع تمثل النقاط الأربع في دائرة الوحدة} \\ \text{أيضاً } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (10)$$

$$4 \quad \begin{cases} \text{بأي النظام } z_1 \text{ و } z_2 \text{ هما جذور المعادلة } z^2 - 2z + 2 = 0 \\ \text{أيضاً } z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

جواب سوال نمائے $20 = 10 + 10$

$$1 \quad I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^5 \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z}{(z^5-1)(z-3)}$$

$$1 \quad \sum_{j=1}^5 \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z}{(z^5-1)(z-3)} + \operatorname{Res}_{z=3} \frac{z}{(z^5-1)(z-3)} + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

تاکہ نتائج طرح طرح کے ہیں مثلاً ہم ان کے لئے $\frac{z}{(z^5-1)(z-3)}$ لے لیں

$$2 \quad \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{z}{(z^5-1)(z-3)} = 0$$

اب $z=3$ پر بھی ایک ہی ہے

$$2 \quad \left\{ \operatorname{Res}_{z=3} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \frac{z}{(z^5-1)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z}{z^5-1} = \frac{6}{242} \right.$$

$$2 \quad \left\{ \sum_{j=1}^5 \operatorname{Res}_{z=z_j} \frac{z}{(z^5-1)(z-3)} = -\frac{6}{242} \right.$$

$$2 \quad \left\{ I_1 = 2\pi i \left(-\frac{6}{242} \right) = -\frac{6\pi i}{121} \right.$$

اب I_2 انتظام کرنے کے لئے ہم z^3-3z لیں اب $z=0, z=\sqrt{3}, z=-\sqrt{3}$ ہوں گے۔
لیجئے ان کے لئے بھی ایک ہی ہے۔

$$1 \quad I_2 = 2\pi i (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$2 \quad b_1 = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \frac{e^{\cos z}}{3z^2-3} \Big|_{z=0} = -\frac{e}{3}$$

$$2 \quad b_2 = \operatorname{Res}_{z=\sqrt{3}} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \frac{e^{\cos \sqrt{3}}}{6}$$

$$2 \quad b_3 = \operatorname{Res}_{z=-\sqrt{3}} \frac{e^{\cos z}}{z^3-3z} = \frac{e^{\cos(-\sqrt{3})}}{6} = \frac{e^{\cos \sqrt{3}}}{6}$$

$$2 \quad I_2 = 2\pi i \left(-\frac{e}{3} + \frac{e^{\cos \sqrt{3}}}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi i (e^{\cos \sqrt{3}} - e)$$

السؤال الرابع (20 درجة) نصف دائرة

3 $\int_{0 \leq \theta \leq 2\pi} z = e^{i\theta}$ عند نصف دائرة

$\cos \theta = (z + \frac{1}{z}) \frac{1}{2}$ نصف دائرة

$d\theta = \frac{dz}{iz}$

4 $I = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 - (z + \frac{1}{z}) \frac{1}{2}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{8z^2 - z^2 - 1}$

$= -\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 6z + 1}$

1+2 $\Delta = 36 - 4 = 32 \Rightarrow z_1 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_1| > 1$

2 $z_2 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_2| < 1$

بما أن z_1 و z_2 هما جذور المعادلة

2 $1 = z \cdot i (b_1) (-\frac{2}{z})$

4 $b_1 = \text{Res}_{z=z_1} \frac{1}{z^2 - 6z + 1} = \frac{1}{2z - 6} \Big|_{z=3-2\sqrt{2}}$

$b_1 = \frac{1}{6 - 4\sqrt{2} - 6} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$

أي أن

2 $I = -\frac{2 \cdot i}{-4\sqrt{2}} \left(\frac{2}{z} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}}$

د. الزكي نوري

مدرس الرياضيات

